DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE

DE LA

FONCTION EXPONENTIELLE

ET DE LA

FONCTION LOGARITHMIQUE

PROPRIÉTÉS

PAR

Henri TRIPIER

INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

Boulevard Saint-Germain, 63

—

1924

FONCTION EXPONENTIELLE

ET

FONCTION LOGARITHMIQUE

DU MÊME AUTEUR

A LA MÊME LIBRAIRIE

Les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques *étudiées parallèlement en partant de la définition géométrique.* Broch. 22/14cm. . . . . **5 fr.** »

DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE

DE LA

FONCTION EXPONENTIELLE

ET DE LA

FONCTION LOGARITHMIQUE

PROPRIÉTÉS

PAR

Henri TRIPIER

INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

Boulevard Saint-Germain, 63

—

1924

[redacted]

PRÉFACE

L'équation différentielle

$$du = u \cdot d\sigma$$

exprime la loi que lord Kelvin a appelée « loi de l'intérêt composé ». Elle se rencontre constamment, en mécanique, en physique, en chimie, en biologie, en sociologie : variation de la tension d'un fil en fonction de l'arc enroulé avec frottement, mouvement amorti par une résistance visqueuse, décharge électrique d'une capacité sur une résistance morte, variation de la pression avec l'altitude en atmosphère au repos, raréfaction d'un gaz pompé dans un vase fermé, écoulement du fluide d'un réservoir, absorption d'une radiation par une couche homogène, refroidissement d'un corps en milieu tranquille, déperdition de l'électricité de la surface d'un liquide qui s'évapore, variation de la quantité d'un composé défini qui se transforme progressivement sous l'action d'un agent physique ou d'un ferment — vitesse d'une réaction monomoléculaire —, loi des transformations radioactives, variation d'une somme placée à intérêts composés, loi de

Gauss sur les erreurs d'observation, loi de Fechner (proportionnalité de la sensation au logarithme de l'excitant), loi de Malthus sur l'augmentation de la population, etc.

Les solutions de cette équation, $u(\sigma)$ — fonction exponentielle — et $\sigma(u)$ — fonction logarithmique —, présentent donc un intérêt pratique très large, dans des domaines fort divers. Aussi nous a-t-il semblé qu'il pouvait être utile de donner de ces solutions une représentation géométrique simple, à la portée de tous ; une telle représentation est exposée dans les quelques pages qui suivent ; nous y avons aussi montré que les principales propriétés des fonctions en question peuvent être élémentairement et simplement établies en partant de cette représentation.

17 Novembre 1923.

FONCTION EXPONENTIELLE
ET
FONCTION LOGARITHMIQUE

DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE. PROPRIÉTÉS

I. **Base.** — Considérons une hyperbole équilatère. Soient Ox et Oy ses axes, OA la longueur du demi-axe transverse (*fig.* 1).

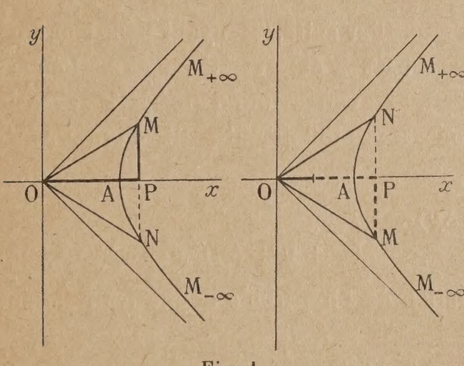


Fig. 1.

Prenons OA comme unité de longueur, et soit alors σ l'aire du secteur hyperbolique NOM, symétrique par rapport à Ox, cette aire étant un nombre positif si le rayon vecteur qui la balaie en allant de ON à OM tourne dans le sens pour lequel l'angle xOy est de 1 droit, et négatif si ce rayon vecteur tourne dans le sens contraire — *fig.* 1, cas de gauche et cas de droite.

Soient x et y les coordonnées du point M par rapport aux axes Ox et Oy.

1. Lorsque M parcourt la branche $M_{-\infty}AM_{+\infty}$ en se déplaçant constamment dans le même sens, de $M_{-\infty}$ à $M_{+\infty}$, σ croît constamment, de la valeur $-\infty$ à la valeur $+\infty$; x décroît de la valeur $+\infty$ à la valeur $OA = 1$, puis croît de cette dernière valeur jusqu'à la valeur $+\infty$; et y croît constamment, de la valeur $-\infty$ à la valeur $+\infty$.

Montrons que la valeur absolue de σ croît indéfiniment lorsque le point M s'éloigne indéfiniment. M allant en M', infiniment voisin, (*fig.* 2), l'aire σ augmente de

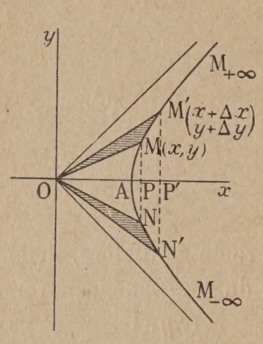


Fig. 2.

$$\Delta\sigma = \text{aire } N'ON + \text{aire } MOM' = 2 \text{ aire } MOM'.$$

Or

$$\text{aire } MOM' = \text{aire } P'OM' - \text{aire } POM - \text{aire } P'PMM'.$$

Par suite, M ayant pour coordonnées x et y et M' pour coordonnées $(x+\Delta x)$ et $(y+\Delta y)$, en confondant l'arc MM' avec la corde MM' nous avons, à des infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$\Delta\sigma = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy - (y + y + \Delta y)\Delta x = x\Delta y - y\Delta x.$$

D'autre part, l'équation de l'hyperbole donne les relations suivantes:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

$$(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 = 1,$$

et, par différence,

$$x\Delta x - y\Delta y + \frac{1}{2}\left[(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2\right] = 0,$$

ou, à des infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$x\Delta x - y\Delta y = 0.$$

Tenant compte de ces différentes relations, nous voyons que

$$x\Delta\sigma = x^2\Delta y - xy\Delta x = x^2\Delta y - y^2\Delta y = (x^2 - y^2)\Delta y = \Delta y,$$

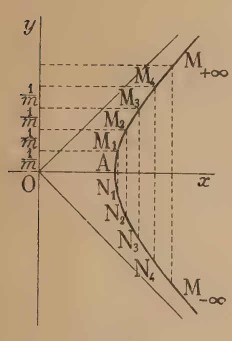


Fig. 3.

c'est-à-dire que

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta y}{x}.$$

Le point M partant de A et s'éloignant constamment en se dirigeant vers $M_{+\infty}$, faisons la somme des éléments $\Delta\sigma$ successifs qui correspondent tous à une même valeur de Δy, $\Delta y = \frac{1}{m}$, m ayant une valeur fixe qui sera aussi grande que l'on voudra (*fig.* 3). Nous avons

$$\sigma = \Sigma\Delta\sigma = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots\right),$$

x_1, x_2, x_3, ... étant les abscisses des points successifs déterminés sur la branche d'hyperbole par les éléments $\Delta\sigma$.

Prenons pour m un nombre entier. Alors x_m est l'abscisse du point de l'hyperbole dont l'ordonnée a pour valeur

$$y_m = m \cdot \frac{1}{m} = 1,$$

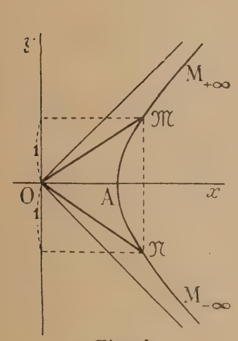


Fig. 4.

point $\mathfrak{M}$ (*fig.* 4), et la partie

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{m-1}}\right)$$

est l'aire $\mathcal{A}$ du secteur polygonal $\mathfrak{N}O\mathfrak{M}$. La partie

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{x_m} + \frac{1}{x_{m+1}} + \frac{1}{x_{m+2}} + \cdots + \frac{1}{x_{m+p-1}}\right)$$

est l'aire supplémentaire $\mathcal{B}$, où $y \geqslant 1$,

L'équation de l'hyperbole étant

$$x^2 - y^2 = 1,$$

on a $$x = \sqrt{1 + y^2}.$$

Or, $$(1 + y^2) < (1 + y)^2.$$

Donc $$x < (1 + y).$$

Par conséquent, si $y \geqslant 1$ on a

$$x < 2, \qquad \frac{1}{x} > \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{B} > \frac{1}{m}\left[\left(\frac{1}{2}\right)_1 + \left(\frac{1}{2}\right)_2 + \left(\frac{1}{2}\right)_3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)_p\right],$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{B} > \frac{1}{m} \cdot p \cdot \frac{1}{2}.$$

Soit $$p = m^2.$$

Alors le secteur polygonal d'aire $(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ a pour ordonnée maximum

$$y_{m+p} = (m + p)\frac{1}{m} = \frac{m + m^2}{m} = 1 + m$$

et $$\mathcal{B} > \frac{m^2}{m} \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{B} > \frac{m}{2},$$

c'est-à-dire $$\mathcal{B} > \frac{y_{m+p} - 1}{2}.$$

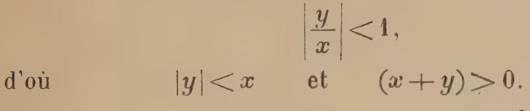
Cette dernière inégalité montre que l'aire $\mathcal{B}$ augmente indéfiniment, donc aussi l'aire $(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, lorsque l'ordonnée maximum du secteur correspondant à cette aire totale, $y_{m+p} = y_{m+m^2} = 1 + m$, augmente indéfiniment, du fait que m augmente indéfiniment, l'intervalle $\Delta y = \dfrac{1}{m}$ tendant vers zéro.

Δy tendant vers zéro, l'aire $(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ se rapproche indéfiniment de l'aire σ. Par conséquent, m augmentant indéfi-

niment, il en est de même de l'aire σ comme de l'aire $(\mathcal{A}+\mathcal{B})$, et l'on en conclut que l'aire σ du secteur hyperbolique augmente indéfiniment en même temps que l'ordonnée maximum de ce secteur.

C. q. f. d.

2. Le point M étant sur la branche $M_{-\infty}AM_{+\infty}$, le rayon vecteur OM est compris entre Ox et l'une ou l'autre des deux asymptotes, par conséquent le coefficient angulaire de OM est compris entre -1 et $+1$:



$$\left|\frac{y}{x}\right| < 1,$$

d'où $\quad |y| < x \quad$ et $\quad (x+y) > 0.$

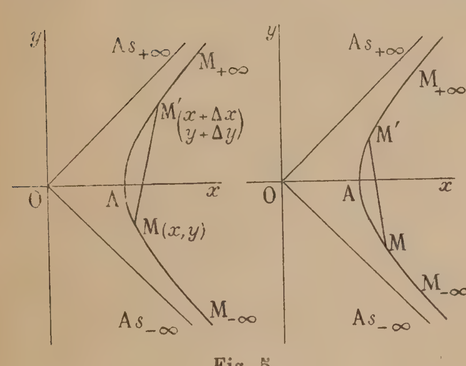


Fig. 5.

3. Étant donnée la forme de la courbe, la corde MM' (*fig.* 5) a un coefficient angulaire plus grand que celui de l'asymptote $OAs_{+\infty}$ ou plus petit que celui de l'asymptote $OAs_{-\infty}$:

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| > 1, \quad \text{ou} \quad \left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right| < 1,$$

d'où

$$1 + \frac{\Delta x}{\Delta y} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta y} > 0;$$

$\Delta(x+y)$ est du même signe que Δy, donc du même signe que $\Delta\sigma$.

II. Définitions. — La somme des coordonnées de M, $(x+y)$, est une fonction de σ.

Les inégalités $(x+y)>0$ et $\frac{\Delta(x+y)}{\Delta\sigma}>0$ montrent que cette fonction est constamment positive et constamment croissante.

L'une de ses propriétés essentielles, que nous établirons en terminant, lui a fait donner le nom de *fonction exponentielle* de σ : $(x+y)=\varepsilon(\sigma)$.

La fonction inverse de cette fonction exponentielle, c'est-à-dire l'aire σ fonction de la somme des coordonnées de M, $(x+y)$, porte le nom de *fonction logarithmique* de $(x+y)$: $\sigma=\log(x+y)$.

La fonction logarithmique ainsi définie est une fonction à argument essentiellement positif. Elle est constamment croissante, comme la fonction inverse.

III. **Représentation géométrique.** — Projetons le point M sur Ox, parallèlement à l'asymptote $OAs_{-\infty}$; nous obtenons le point m.

Fig. 6.

Algébriquement, nous avons

$$x+y=(OP)+(PM)$$
$$=(OP)+(Pm)=(Om).$$

La fonction exponentielle considérée relie donc l'aire algébrique du secteur hyperbolique NOM, σ, à l'abscisse du point m, (Om) :

$$(Om)=\varepsilon(\sigma).$$

La figure fait voir que $\varepsilon(\sigma)$ est une fonction positive $[(Om)>0]$, croissante $[(Om)$ croît avec $\sigma]$, et telle que :

$\varepsilon(-\infty)=0$ (le point M est en $M_{-\infty}$, le point m en O),
$\varepsilon(0)=1$ (le point M est en A, le point m en A),
$\varepsilon(+\infty)=+\infty$ (le point M est en $M_{+\infty}$, le point m en $x_{+\infty}$).

La fonction logarithmique, fonction inverse de la précédente, relie l'abscisse du point m, (Om), à l'aire algébrique du secteur hyperbolique NOM, σ :

$$\sigma = \log(Om).$$

La fonction logarithmique considérée est croissante ; elle n'est définie que pour les valeurs positives de l'argument, et elle est telle que :

$\log 0 = -\infty$ (le point m est en O, le point M en $M_{-\infty}$),
$\log 1 = 0$ (le point m est en A, le point M en A),
$\log(+\infty) = +\infty$ (le point m est en $x_{+\infty}$, le point M en $M_{+\infty}$).

En projetant le point M sur Ox parallèlement à l'asymptote $OAs_{+\infty}$ (*fig.* 7), nous obtenons le point n tel que

$$x - y = (OP) - (PM) = (OP) - (nP) = (On).$$

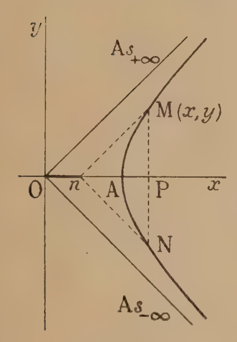


Fig. 7.

Ce point n est la projection de N sur Ox, parallèlement à $OAs_{-\infty}$. Or N est le sommet extrémité du secteur hyperbolique MON, et l'aire algébrique de ce secteur est $(-\sigma)$. Par conséquent

$$(On) = \varepsilon(-\sigma),$$

c'est-à-dire

$$x - y = \varepsilon(-\sigma).$$

Remarque. — Des deux égalités

$$x + y = \varepsilon(\sigma) \quad \text{et} \quad x - y = \varepsilon(-\sigma),$$

on tire

$$x = \text{cosinus hyperbolique de } \sigma [\text{ch } \sigma] = \frac{\varepsilon(\sigma) + \varepsilon(-\sigma)}{2}$$

et

$$y = \text{sinus hyperbolique de } \sigma [\text{sh } \sigma] = \frac{\varepsilon(\sigma) - \varepsilon(-\sigma)}{2}.$$

IV. **Dérivées.** — Imaginons que σ varie de $\Delta\sigma$, le point courant M passant en M′ infiniment voisin (*fig.* 8).

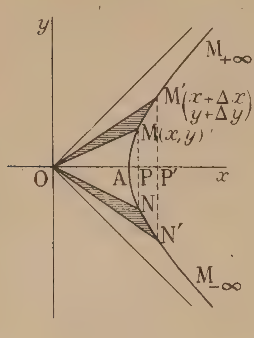


Fig. 8.

Nous avons vu que, à des infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$\Delta\sigma = x\Delta y - y\Delta x.$$

1. Fonction $(x+y) = \varepsilon(\sigma)$.

Cette égalité entraîne les suivantes :

$$(x+y)\Delta\sigma = x^2\Delta y - xy\Delta x + xy\Delta y - y^2\Delta x.$$

Mais, ainsi que nous l'avons établi au début, à des infiniment petits d'ordre supérieur près on a

$$x\Delta x - y\Delta y = 0.$$

Multipliée successivement par y et x, cette dernière relation donne

$$xy\Delta x = y^2\Delta y \qquad \text{et} \qquad xy\Delta y = x^2\Delta x.$$

Tenant compte de cela, nous obtenons

$$(x+y)\Delta\sigma = x^2\Delta y - y^2\Delta y + x^2\Delta x - y^2\Delta x = (x^2 - y^2)(\Delta x + \Delta y) = \Delta(x+y).$$

Ainsi $\dfrac{\Delta(x+y)}{\Delta\sigma} = (x+y)$, à des infiniment petits près.

C'est dire que

$$\lim \frac{\Delta(x+y)}{\Delta\sigma} = (x+y),$$

que Dérivée $_\sigma$ de $(x+y) = (x+y)$; $\varepsilon'(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

La fonction exponentielle a une dérivée qui lui est égale.

La fonction exponentielle est donc une solution $u(\sigma)$ de l'équation différentielle

$$\frac{du}{d\sigma} = u,$$

ou

$$du = u d\sigma.$$

C'est la solution u qui prend la valeur 1 lorsque la variable σ prend la valeur 0.

2. Fonction $(x - y) = \eta(\sigma)$.

Nous savons que

$$\eta(\sigma) = \varepsilon(-\sigma).$$

Dérivée, cette identité donne la suivante :

$$\eta'(\sigma) = \varepsilon'(-\sigma).$$

Mais, d'après la dérivation des fonctions de fonction et celle de la fonction ε,

$$\varepsilon'(-\sigma) = -\varepsilon(-\sigma).$$

Donc

$$\varepsilon'(-\sigma) = -\eta(\sigma),$$

d'où il résulte que

$$\eta'(\sigma) = -\eta(\sigma).$$

La fonction $\eta(\sigma)$ est donc une solution $u(\sigma)$ de l'équation différentielle

$$\frac{du}{d\sigma} = -u,$$

ou

$$du = -u d\sigma.$$

C'est la solution u qui prend la valeur 1 lorsque la variable σ prend la valeur 0.

3. Fonction $\sigma = \log(x + y)$.

Les dérivées correspondantes de deux fonctions inverses l'une de l'autre étant des valeurs inverses l'une de l'autre, on a

$$(x + y)'_\sigma \,.\, \sigma'_{(x+y)} = 1,$$

ou

$$\sigma'_{(x+y)} = \frac{1}{(x + y)'_\sigma} = \frac{1}{(x + y)}.$$

La fonction logarithmique a une dérivée qui est égale à l'inverse de la valeur de l'argument de la fonction.

La fonction logarithmique est donc une solution $\sigma(u)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d\sigma}{du} = \frac{1}{u},$$

ou

$$du = u d\sigma.$$

C'est la solution σ qui prend la valeur 0 lorsque la variable u prend la valeur 1.

Remarque. — Les deux identités

$$(x+y)'_\sigma = (x+y) \qquad \text{et} \qquad (x-y)'_\sigma = -(x-y)\text{(1)}$$

peuvent s'écrire

$$x'_\sigma + y'_\sigma = x + y \qquad \text{et} \qquad x'_\sigma - y'_\sigma = -x + y.$$

En additionnant, puis soustrayant membre à membre ces dernières identités, on obtient

$$x'_\sigma = y \qquad \text{et} \qquad y'_\sigma = x,$$

c'est-à-dire

$$(\text{ch}\,\sigma)'_\sigma = \text{sh}\,\sigma \qquad \text{et} \qquad (\text{sh}\,\sigma)' = \text{ch}\,\sigma.$$

V. **Développements en série.** — Appliquons la formule de Taylor :

$$f(\sigma) = f(0) + \frac{\sigma}{1} f'(0) + \frac{\sigma^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \cdots + \frac{\sigma^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(0) + \frac{\sigma^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}(\theta\sigma),$$

où

$$0 < \theta < 1.$$

---

(1) Directement, on voit que $(x-y)\Delta\sigma = -\Delta(x-y)$, comme on a vu que $(x+y)\Delta\sigma = \Delta(x+y)$.

1. Fonction exponentielle. — Nous avons

$$f(\sigma) = \varepsilon(\sigma),$$

$$\varepsilon'(\sigma) = \varepsilon(\sigma),$$

puis, en différentiant cette identité,

$$\varepsilon''(\sigma) = \varepsilon'(\sigma);$$

donc

$$\varepsilon''(\sigma) = \varepsilon(\sigma).$$

La différentiation de cette nouvelle identité donne

$$\varepsilon'''(\sigma) = \varepsilon'(\sigma);$$

donc

$$\varepsilon'''(\sigma) = \varepsilon(\sigma).$$

Et ainsi de suite. On a

$$\varepsilon^{(n)}(\sigma) = \varepsilon(\sigma).$$

La formule de Taylor s'écrira donc ici

$$\varepsilon(\sigma) = 1 + \frac{\sigma}{1} + \frac{\sigma^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\sigma^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \frac{\sigma^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}\varepsilon(\theta\sigma).$$

Si le nombre entier n augmente indéfiniment, $\frac{\sigma^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$ tend vers 0. D'autre part, puisque ε est une fonction positive et croissante, on a toujours

$$0 < \varepsilon(\theta\sigma) \leqslant \varepsilon(|\theta\sigma|) < \varepsilon(|\sigma|).$$

Donc, σ étant donné, si n augmente indéfiniment le terme $\frac{\sigma^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}\varepsilon(\theta\sigma)$ tend vers 0. Autrement dit, $\varepsilon(\sigma)$ est la somme de la série

$$1 + \frac{\sigma}{1} + \frac{\sigma^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\sigma^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \cdots$$

Et puisque

$$\eta(\sigma) = \varepsilon(-\sigma),$$

$\eta(\sigma)$ est la somme de la série

$$1 - \frac{\sigma}{1} + \frac{\sigma^2}{1 \cdot 2} - \frac{\sigma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\sigma^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$

2. Fonction logarithmique. — Soit $(\mathrm{A}m) = r$ (*fig.* 6). On a

$$x + y = (\mathrm{O}m) = (\mathrm{OA}) + (\mathrm{A}m) = 1 + (\mathrm{A}m) = 1 + r,$$

et

$$\sigma = \log(1 + r).$$

Appliquons la formule de Taylor à la fonction $f(r) = \sigma(r)$. Nous avons

$$\sigma'_r = \frac{1}{1+r}, \qquad \sigma''_{r^2} = -\frac{1}{(1+r)^2}, \qquad \sigma'''_{r^3} = +\frac{1\,.\,2}{(1+r)^3},$$

$$\sigma^{\mathrm{IV}}_{r^4} = -\frac{1\,.\,2\,.\,3}{(1+r)^4}, \qquad \sigma^{\mathrm{V}}_{r^5} = +\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{(1+r)^5}, \qquad \ldots\ldots,$$

donc

$$\log(1+r) = \log 1 + \frac{r}{1}\cdot\frac{1}{1} - \frac{r^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{1} + \frac{r^3}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1\,.\,2}{1}$$
$$- \frac{r^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cdot\frac{1\,.\,2\,.\,3}{1} + \frac{r^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cdot\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{1} - \ldots$$
$$\pm \frac{r^{(n+1)}}{1\,.\,2\ldots(n+1)}\cdot\frac{1\,.\,2\ldots n}{(1+\theta r)^{(n+1)}},$$

c'est-à-dire que

$$\log(1+r) = \frac{r}{1} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} + \frac{r^5}{5}$$
$$- \ldots \pm \frac{r^{(n+1)}}{(n+1)}\cdot\frac{1}{(1+\theta r)^{(n+1)}}.$$

Limitons, très simplement, le champ de la valeur r, de telle façon que le terme

$$\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)}\cdot\frac{1}{(1+\theta r)^{(n+1)}}$$

tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et qu'ainsi $\log(1+r)$ soit la somme de la série

$$\frac{r}{1} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} + \ldots - (-1)^n\frac{r^n}{n} - \ldots$$

Le terme considéré peut s'écrire

$$\frac{1}{(n+1)}\cdot\left(\frac{r}{1+\theta r}\right)^{(n+1)} = \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{1}{\frac{1}{r}+\theta}\right)^{(n+1)}.$$

Il tendra donc nécessairement vers 0 lorsque n augmentera indéfiniment si la valeur absolue de $\left(\frac{1}{r}+\theta\right)$ est supérieure à 1.

Rappelons que $0<\theta<1$.

Nous voyons de suite que :

1° si r est positif et inférieur ou au plus égal à 1 : $0<r\leqslant 1$,

on a $$\frac{1}{r}\geqslant 1, \qquad \left(\frac{1}{r}+\theta\right)>1,$$

et la condition cherchée est satisfaite ;

2° si r est négatif et supérieur ou au moins égal à $\frac{1}{2}$:

$$r=-r' \quad \text{avec} \quad 0<r'\leqslant\frac{1}{2},$$

on a $$\frac{1}{r}+\theta=-\frac{1}{r'}+\theta<0,$$

$$\frac{1}{r'}\geqslant 2, \qquad \left(\frac{1}{r'}-\theta\right)>1,$$

et la condition cherchée est satisfaite.

La série ci-dessus représente donc $\log(1+r)$ au moins pour les valeurs de r comprises entre $-\frac{1}{2}$ et 1 ou égales à ces limites :

$$-\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant 1.$$

La valeur absolue du terme général de cette série ne tend pas vers zéro alors que n augmente indéfiniment si la valeur absolue de r est supérieure à 1 : $|r|=(1+\alpha)$ avec $\alpha>0$; cela se voit de suite en remarquant que $(1+\alpha)^n>(1+n\alpha)$ lorsque $\alpha>0$, $\frac{(1+\alpha)^n}{n}>\left(\frac{1}{n}+\alpha\right)$ et cette dernière valeur tend vers $\alpha>0$ lorsque n augmente indéfiniment. La série est donc divergente, par suite incapable de représenter la valeur $\log(1+r)$, si $|r|>1$.

On démontre que la représentation de $\log(1+r)$ par la série en question est valable si $-1<r\leqslant 1$.

VI. Addition des arguments. — Au nombre algébrique σ_1 correspond le secteur hyperbolique N_1OM_1, d'aire σ_1 ; au nombre algébrique σ_2 correspond le secteur hyperbolique N_2OM_2, d'aire σ_2 ; et au nombre algébrique $(\sigma_1 + \sigma_2)$ corres-

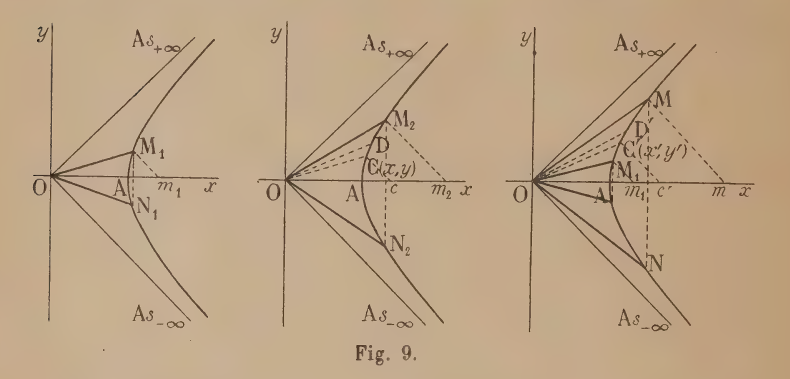


Fig. 9.

pond le secteur hyperbolique NOM, d'aire $(\sigma_1 + \sigma_2)$ (*fig.* 9).

Projetons les points M_1, M_2 et M sur Ox, parallèlement à l'asymptote $OAs_{-\infty}$. Nous obtenons les points m_1, m_2 et m. Par définition de la fonction ε, nous avons

$$(Om_1) = \varepsilon(\sigma_1),$$
$$(Om_2) = \varepsilon(\sigma_2),$$
$$(Om) = \varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Le point M sera obtenu en ajoutant au secteur AOM_1 un secteur M_1OM de même aire que le secteur AOM_2. Cette opération peut être ainsi conçue : le secteur AOM_2 étant partagé en une succession de secteurs infiniment petits COD, des secteurs infiniment petits d'aires respectivement égales à celles des secteurs COD, dans le même ordre et dans le même sens que ceux-ci, sont portés à la suite du secteur AOM_1 : au secteur COD, d'aire $\Delta\sigma$, correspond le secteur

C′OD′, d'aire $\Delta\sigma'$, et, comme nous l'avons vu, à des infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$(x+y)\Delta\sigma = \Delta(x+y)$$

et

$$(x'+y')\Delta\sigma' = \Delta(x'+y'),$$

c'est-à-dire

$$(Oc) \,.\, \Delta\sigma = \Delta(Oc)$$

et

$$(Oc') \,.\, \Delta\sigma' = \Delta(Oc'),$$

d'où, puisque

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma',$$

$$(Oc) \,.\, \Delta(Oc') = (Oc') \,.\, \Delta(Oc),$$

donc

$$\Delta\left(\frac{Oc'}{Oc}\right) = 0.$$

Cette dernière relation ayant lieu à des infiniment petits d'ordre supérieur près, il s'ensuit que, dans la correspondance envisagée entre les points c' et c, le rapport $\frac{Oc'}{Oc}$ a une valeur constante.

Par conséquent

$$\left(\frac{Oc'}{Oc}\right)_{\text{initial}} = \left(\frac{Oc'}{Oc}\right)_{\text{final}},$$

c'est-à-dire, puisque c va de A en m_2 et c' de m_1 en m,

$$\frac{Om_1}{OA} = \frac{Om}{Om_2},$$

ou

$$Om = Om_1 \,.\, Om_2,$$

vu que OA est l'unité de longueur :

$$\varepsilon(\sigma_1+\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \,.\, \varepsilon(\sigma_2).$$

De cette propriété de la fonction ε résulte immédiatement la suivante, pour la fonction inverse log.

Soit

$$u = \varepsilon(\sigma_1+\sigma_2), \qquad u_1 = \varepsilon(\sigma_1), \qquad u_2 = \varepsilon(\sigma_2).$$

On a $$u = u_1 \,.\, u_2$$
et $$\sigma_1 + \sigma_2 = \log u, \qquad \sigma_1 = \log u_1, \qquad \sigma_2 = \log u_2,$$
donc $$\log u_1 + \log u_2 = \log u_1 u_2.$$

Justification du qualificatif « exponentiel ». — Si $\sigma_1 = \sigma_2$,
on a $$\varepsilon(2\sigma) = [\varepsilon(\sigma)]^2.$$
Puis $$\varepsilon(3\sigma) = \varepsilon(2\sigma + \sigma) = \varepsilon(2\sigma)\,.\,\varepsilon(\sigma) = [\varepsilon(\sigma)]^3.$$
Et ainsi de suite.

p étant un entier quelconque, $\varepsilon(p\sigma) = [\varepsilon(\sigma)]^p$, et p et q étant deux entiers quelconques, $\varepsilon\left(\frac{p}{q}\sigma\right) = [\varepsilon(\sigma)]^{\frac{p}{q}}$. Par conséquent, en raison de la continuité de la fonction ε, n étant un nombre qualifié quelconque, rationnel ou irrationnel,
$$\varepsilon(n\sigma) = [\varepsilon(\sigma)]^n.$$

Dans cette dernière identité, faisons $\sigma = 1$ et $n = \sigma$. Nous obtenons l'identité
$$\varepsilon(\sigma) = [\varepsilon(1)]^\sigma,$$
où
$$\varepsilon(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \cdots + \frac{1}{1\,.\,2\ldots n} + \cdots = 2{,}71828\ldots = \varepsilon.$$

L'identité $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon^\sigma$ explique qu'on ait donné à la fonction $\varepsilon(\sigma)$ le nom de fonction exponentielle.

Les propriétés analytiques de la fonction $\varepsilon(\sigma)$ que nous venons d'établir ont conduit, par voie de généralisation, à la définition de la fonction $\varepsilon(\sigma_1 + j\sigma_2)$, j étant l'unité en quadrature du domaine de la variable complexe [1].

---

[1] Cf. *Les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques étudiées parallèlement, en partant de la définition géométrique,* par Henri Tripier.

TABLE DES MATIÈRES

CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT

Précis de Mathématiques spéciales, par G. Papelier, professeur au lycée d'Orléans. — 4 vol. 22/14cm :

Algèbre, Analyse et Trigonométrie, 9e édition. . . **18 fr. 75**
Géométrie analytique à deux et trois dimensions, 6e édition. . . . . **22 fr. »**
Mécanique, 4e édition. . . . . **15 fr. »**
Géométrie descriptive, 2e édition.. . . . . . . **16 fr. 25**

Exercices de Mathématiques spéciales, par P. Aubert, professeur au lycée Henri IV, et G. Papelier. — Vol. 22/14cm.

Algèbre, Analyse et Trigonométrie. — 2 vol., chacun.. . . . . **12 fr. »**
Géométrie analytique. — 3 vol., chacun. . . . . **12 fr. »**
Mécanique. — 1 vol. . . . . **12 fr. »**
Descriptive. — 1 vol. de texte et 1 vol. de planches, les deux. . . . . **24 fr. »**
Calcul numérique. — 2 vol., chacun. . . . . . **12 fr. »**

Éléments de Mathématiques supérieures, par H. Vogt, professeur à l'Université de Nancy. — Vol. 25/16cm. . **20 fr. »**

Solutions des Exercices proposés dans les *Éléments de Mathématiques supérieures,* par H. Vogt. — Vol. 25/16cm. **10 fr. »**

Éléments de Calcul différentiel et intégral, par W.-A. Granville, président du collège de Pensylvanie. Traduit par M. Sallin. — Vol. 25/16cm.. . . . . **30 fr. »**

Leçons de Géométrie vectorielle, par G. Bouligand, professeur à l'Université de Poitiers. — Vol. 25/16cm. . . . **25 fr. »**

Courbes géométriques remarquables, *planes et gauches,* par H. Brocard et T. Lemoyne. — *Ouvrage honoré d'une subvention de l'Académie des Sciences.* — 3 vol. 25/16cm.

Tome I. . . . . **25 fr. »**
Tomes II et III.. . . . . *(En préparation.)*

Les lieux géométriques en Mathématiques spéciales, *avec application du principe de correspondance et de la théorie des caractéristiques à 1400 problèmes de lieux et d'enveloppes,* par T. Lemoyne. — Vol. 25/16cm. . . . . **10 fr. »**

Les méthodes exposées dans cet ouvrage sont accessibles à un élève de Mathématiques élémentaires et permettent de résoudre géométriquement, avec une extrême facilité, un nombre considérable de problèmes de géométrie analytique plane.

Conférences sur les Transformations en Géométrie plane, par W. de Tannenberg, ancien professeur de l'Université de Bordeaux. — Vol. 25/16cm. . . . . **4 fr. »**

Un théorème de géométrie et ses applications, par G. Cuny, ancien élève de l'École polytechnique. — Vol. 25/16cm.
8 fr. »

CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.

2 fr.